Uygulamalar

1. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & d.h.\end{cases}$

yoğunluk fonksiyonu verilen X, t.d. nin Moment Çıkaran Fonksiyonunu bulunuz.

<u>Çözüm</u>: $M_x(t)=\int_0^\infty e^{tx}.f(x).dx$

$$=\int_0^\infty e^{tx}.\frac{1}{2}.e^{-\frac{x}{2}}.dx$$

$$=\frac{1}{2}.\int_0^\infty \cancel{e^{(t-\frac{1}{2}).x}}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x.(\frac{1}{2}-t)}.dx$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{-1}{(\frac{1}{2}-t)}e^{-x.(\frac{1}{2}-t)}\Big|_0^\infty=\frac{1}{2}.\frac{1}{(\frac{1}{2}-t)}=(1-2t)^{-1}$$

2. X, t.d. nin M.G.F. nu $M_x(t)$ veriliyor. $Y=-X$ t.d. nin moment çıkaran fonksiyonunu bulunuz.

$$M_Y(t)=M_{-x}(t)=E(e^{t.(-X)})=E(e^{-tX})$$ bulunur.

$$=M_X(-t)$$

3. $M_x(t)=e^{3t+8t^2}$ veriliyor. $Z=\frac{1}{4}.(X-3)$ olsun. $M_Z(t)=?$, $V(Z)=?$

$$M_Z(t)=M_{\frac{X-3}{4}}(t)=E(e^{(\frac{X-3}{4}).t})=E(e^{-\frac{3}{4}t}.e^{\frac{t}{4}X})$$

$$=e^{-\frac{3}{4}.t}.M_X(\tfrac{t}{4})$$ olur.

$M_x(t)=e^{3t+8t^2}$ idi

$$\Rightarrow M_x(\tfrac{t}{4})=e^{3.(\frac{t}{4})+8.(\frac{t}{4})^2}=e^{\frac{3t}{4}+\frac{t^2}{2}}$$ bulunur.

Böylece; $M_Z(t)=e^{-\frac{3}{4}.t}\,e^{\frac{3t}{4}+\frac{t^2}{2}}$

$$=e^{t^2/2}$$ //

$$E(z) = \left.\frac{\partial M_z(t)}{\partial t}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{2t}{2} \cdot e^{t^2/2}\right|_{t=0} = \left.t \cdot e^{\frac{t^2}{2}}\right|_{t=0} = 0$$

$$E(z^2) = \left.\frac{\partial^2 M_z(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \left.e^{t^2/2} + t \cdot t \cdot e^{t^2/2}\right|_{t=0}$$

$$= \left.e^{t^2/2} \cdot (1+t^2)\right|_{t=0}$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow V(z) = E(z^2) - [E(z)]^2 = 1 - 0^2 = 1$$ bulunur.

4. Bir para iki kez atılıyor ve üste gelen tura sayısı X td. olsun. $M_x(t) = ?$

Çözüm: X: Üste gelen Tura sayısı olsun.

X'in olasılık dağılımı,

X	0	1	2
$p(X=x)$	$1/4$	$2/4$	$1/4$

örnek uzayı

$S = \{(Y,Y), (Y,T), (T,Y), (T,T)\}$

$$\to M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{2} e^{tx} \cdot p(x)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot e^{t.0} + \frac{2}{4} \cdot e^{1.t} + \frac{1}{4} \cdot e^{2.t}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (1 + 2e^{t} + e^{2t}) = \frac{1}{4} \cdot (1+e^{t})^2$$

5. Binom dağılımında $p(X=x) = p(X=x-1)$ olması için $x=?$

Çözüm:

$$p(X=x) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x} = \binom{n}{x-1} \cdot p^{x-1} \cdot q^{n-(x-1)} = p(X=x-1)$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{n!}}{x \cdot \cancel{(x-1)!} \cdot \cancel{(n-x)!}} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(x-1)!} \cdot \underbrace{(n-x+1)!}_{(n-x+1)\cancel{(n-x)!}}} \cdot p^{x-1} \cdot q^{n-x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{p^{x} \cdot q^{n-x}}{x} = \frac{p^{x-1} \cdot q^{n-x+1}}{(n-x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{p^{x}} \cdot \cancel{q^{n}} \cdot q^{-x}}{x} = \frac{\cancel{p^{x}} \cdot p^{-1} \cdot \cancel{q^{n}} \cdot q^{-(x+1)}}{(n-x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x \cdot \cancel{q^{x}}} = \frac{q}{p \cdot \cancel{q^{x}} \cdot (n-x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{q}{p \cdot (n-x+1)}$$

$$\Rightarrow xq = p \cdot n - px + p$$

$$\Rightarrow x \cdot (p+q) = n \cdot p + p$$

$$\Rightarrow x = p \cdot (n+1)$$

bulunur.

6. Bir depodaki 50 radyo alıcısından 10 tanesinin bozuk olduğu biliniyor. 9 tane iadeli olarak çekiliyor. İkiden az bozuk alıcı çekilme olasılığı nedir.

Çözüm: X: Çekilen bozuk radyo alıcı sayısı olmak üzere $p = 10/50 = 1/5$ olan binom dağılımı

$n=9$

$$p(x<3) = p(x=0) + p(x=1) + p(x=2)$$

$$= \binom{9}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{0} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{9} + \binom{9}{1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{8} + \binom{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2} \left(\frac{4}{5}\right)^{7}$$